

Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού

Δεσλή Δέσποινα

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.,
ddesli@eled.auth.gr

Τριανταφύλλου Ειρήνη

Απόφοιτη Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ., Μεταπτυχιακή φοιτήτρια στη Διδακτική των Μαθηματικών
eirinitriant96@gmail.com

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα των μικρών παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων. Για τον σκοπό αυτό σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε συνολικά 64 παιδιά Α' και Β' τάξης τρία έργα που αφορούσαν: α) την εκτίμηση θέσης αριθμού σε άδεια αριθμογραμμή (Έργο 1), β) την εκτίμηση αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση σε άδεια αριθμογραμμή (Έργο 2), και γ) την εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου (Έργο 3). Αν και τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ηλικιακών ομάδων δεν διαφοροποιήθηκαν σημαντικά, η χρήση της αριθμογραμμής ευνόησε τις επιτυχείς εκτιμήσεις τους: το 75% των παιδιών πραγματοποίησαν επιτυχείς εκτιμήσεις στα Έργα 1 και 2 όπου χρησιμοποιήθηκε η αριθμογραμμή. Τέλος, ανεξάρτητα από ηλικιακή ομάδα, στο σύνολο των έργων τα παιδιά δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις δοκιμασίες με τους μεσαίους αριθμούς σε σχέση με τις δοκιμασίες που είχαν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς.

Λέξεις κλειδιά: εκτιμήσεις, αριθμητικές ποσότητες, αριθμογραμμή, πληθικότητα

Εισαγωγή

Η εκτίμηση μιας αριθμητικής ποσότητας αφορά στον υπολογισμό κατά προσέγγιση του αριθμού των στοιχείων σε ένα σύνολο (Hogan & Brezinski, 2003) όπως, για παράδειγμα, πόσα περίπου είναι τα παιδιά σε μία αίθουσα. Χρησιμοποιείται για γρήγορες ή προσεγγιστικές απαντήσεις σε περιπτώσεις που δεν απαιτείται ο προσδιορισμός μίας ποσότητας με ακρίβεια και συχνά αποτελεί μέσο ελέγχου των απαντήσεων που απαιτούν πολύπλοκους ή ακριβείς υπολογισμούς. Θεωρείται πολύ σημαντική ικανότητα που αποκτάται, αξιοποιείται και αναπτύσσεται μέσα από εξοικείωση στην καθημερινή μας ζωή αλλά και σε ειδικά μαθηματικά πλαίσια (Booth & Siegler, 2006). Για τον λόγο αυτό μάλιστα αρκετοί είναι οι ερευνητές (π.χ., Gilmore, McCarthy & Spelke, 2010; Sasanguie, van den Bussche & Reynvoet, 2012; Park & Brannon, 2013) που υποστηρίζουν ότι η ικανότητα εκτίμησης αριθμητικών ποσοτήτων προβλέπει τη μετέπειτα μαθηματική επίδοση των παιδιών στο σχολείο: παιδιά που πραγματοποιούν επιτυχείς αριθμητικές εκτιμήσεις συνήθως διαθέτουν καλή γνώση των βασικών δεδομένων της αριθμητικής και χρησιμοποιούν ποικιλία στρατηγικών για εκτίμηση. Ως εκ τούτου, στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών στην Ελλάδα και το εξωτερικό η αξία της εκτίμησης έχει επισημανθεί και η διδακτική αξιοποίησή της ξεκινά από πολύ νωρίς.

Η ικανότητα εκτίμησης ποσοτήτων έχει εξεταστεί κυρίως με τη χρήση της αριθμογραμμής, καθώς φαίνεται ότι η ικανότητα αναπαράστασης ποσοτήτων σε μία νοερή αριθμητική γραμμή ευνοεί τη σύνδεση της αναπαράστασης του μεγέθους ενός αριθμού με τη συμβολική μορφή του (Thompson & Orfer, 2010) αλλά και τη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών (Schneider, Grabner & Paetsch, 2009). Έρευνες έχουν δείξει ότι, στα πλαίσια των αναπαραστάσεων που αξιοποιούνται κατά τη διδασκαλία, η αριθμογραμμή αποτελεί μοντέλο που προσφέρει τη δυνατότητα οπτικοποίησης των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, των αριθμητικών πράξεων και της αξιακής τους θέσης. Για παράδειγμα, μπορεί να

ενισχύσει την κατανόηση ότι οι φυσικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν αριθμητικά μεγέθη τα οποία διατάσσονται σε σειρά (τοποθετημένα μεγεθυντικά από τα αριστερά προς τα δεξιά) και η αριθμητική τους ανάπτυξη αποτυπώνεται στις συγκεκριμένες θέσεις τους που έχουν χωρικά πάνω στην αριθμογραμμή (Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Link, Nuerk & Moeller, 2014). Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις η αριθμογραμμή λειτουργεί ως εμπόδιο για τη λύση προβλήματος (Σκουμπουρδή, 2012). Η παράστασή της ως ημιευθείας που ξεκινά από το 0 δυσκολεύει την εννοιολογική συγκρότηση των αριθμών κατά την εισαγωγή, για παράδειγμα, των αρνητικών αριθμών (Τζεκάκη, 2007).

Στη διεθνή βιβλιογραφία, δύο είναι οι κύριες τάσεις αναφορικά με την ερμηνεία της επιτυχίας των παιδιών σε αριθμητικές εκτιμήσεις. Η μία τάση, που προτείνεται από τον Siegler και τους συνεργάτες του (π.χ., Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003; Thompson & Opfer, 2010), υποστηρίζει ότι τα παιδιά αρχικά εκτιμούν τους αριθμούς με έναν λιγότερο ακριβή τρόπο που παραπέμπει σε λογαριθμικές λειτουργίες αναπαραστάσεων της αριθμητικής αξίας και σταδιακά –με την ηλικία και τις εμπειρίες– αναπτύσσουν και ακολουθούν περισσότερο γραμμικές αναπαραστάσεις που οδηγούν σε υψηλότερα ποσοστά σωστών εκτιμήσεων. Για παράδειγμα, όταν οι Siegler και Opfer (2003) έδειξαν σε οκτάχρονα και δεκάχρονα παιδιά μία αριθμητική γραμμή που ξεκινούσε από το 1 και τελείωνε στο 1.000 και τους ζήτησαν να σημειώσουν τη θέση του 150 στη γραμμή αυτή, τα περισσότερα εκτίμησαν το 150 πιο κοντά στο 1.000. Αντίθετα, στην ίδια δοκιμασία, οι ενήλικες και τα μεγαλύτερα παιδιά (12 ετών) που συμμετείχαν πραγματοποίησαν εκτιμήσεις στη βάση περισσότερο γραμμικών αναπαραστάσεων. Με άλλα λόγια, τα μικρά παιδιά μεγιστοποιούν την απόσταση των αριθμητικών μεγεθών στα χαμηλά άκρα της αριθμογραμμής και ελαχιστοποιούν την απόσταση των αριθμητικών μεγεθών στα μεσαία και υψηλά άκρα της αριθμογραμμής. Καθώς μεγαλώνουν αναπτύσσουν μία γραμμική αναπαράσταση και βασίζουν τις εκτιμήσεις τους σε μία αριθμητική γραμμή με ίσες αποστάσεις μεταξύ των αριθμητικών μεγεθών. Στα ίδια αποτελέσματα κατέληξαν και οι Siegler και Booth (2004), με παιδιά νηπιαγωγείου και δευτέρας τάξης, με τη χρήση αριθμογραμμής από το 1 έως το 100.

Οι Barth και Paladino (2011), ωστόσο, αμφισβητούν αυτή τη μετάβαση από τη λογαριθμική στη γραμμική αναπαράσταση της αριθμητικής αξίας και υποστηρίζουν ότι, όταν τα παιδιά εκτιμούν τη θέση αριθμητικών μεγεθών σε μία αριθμητική γραμμή, οι εκτιμήσεις τους βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στο συγκεκριμένο αριθμητικό μέγεθος το οποίο εκτιμούν και το σύνολο της αριθμητικής γραμμής. Στην έρευνά τους βρήκαν πως πεντάχρονα και επτάχρονα παιδιά εκτιμούν με επιτυχία την τιμή ενός αριθμού σε συγκεκριμένη θέση σε μία αριθμογραμμή από το 1 έως το 100. Για παράδειγμα, τοποθετούν το 50 περίπου στη μέση της γραμμής αιτιολογώντας στη βάση της αναλογικής σχέσης ανάμεσα στο 50 και το 100. Μάλιστα υποστηρίζουν ότι ακριβώς αυτό τον ρόλο της αναγνώρισης των αναλογικών σχέσεων έχουν τα σημεία αναφοράς που χρησιμοποιούνται για να κατευθύνουν τις εκτιμήσεις τους: όσο περισσότερα σημεία αναφοράς είναι διαθέσιμα τόσο περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις πραγματοποιούνται, ιδιαίτερα αυτές που είναι κοντά στα σημεία αναφοράς.

Τα τελευταία χρόνια μία τρίτη εναλλακτική θεώρηση, που βασίζεται και συνδυάζει τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις, έχει προταθεί (π.χ., Ebersbach, Luwel & Verschaffel, 2015; Dackermann, Huber, Bahnmueller, Nuerk & Moeller, 2015), σύμφωνα με την οποία οι αναπτυξιακές αλλαγές στις αριθμητικές εκτιμήσεις των παιδιών και των ενηλίκων είναι αποτέλεσμα της εξοικείωσής τους με τους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι Ebersbach, Luwel, Frick, Onghena και Verschaffel (2008) βρήκαν πως παιδιά πέντε έως εννέα ετών πραγματοποιούν περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις για ποσότητες που αφορούν αριθμούς με τους οποίους είναι περισσότερο εξοικειωμένα παρά για ποσότητες που αφορούν λιγότερο γνωστούς αριθμούς. Οι λιγότερο γνωστοί αριθμοί μάλιστα συνδέονται με

περισσότερο αργοπορημένη ανάπτυξη των γραμμικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τους περισσότερους γνωστούς αριθμούς.

Παρόλο που η έρευνα σχετικά με την ικανότητα επιτυχών αριθμητικών εκτιμήσεων είναι αρκετά πλούσια, είναι ταυτόχρονα προσανατολισμένη στη χρήση της αριθμογραμμής ως εργαλείο ελέγχου της. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα των μικρών παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων με τη χρήση της αριθμογραμμής αλλά και χωρίς αυτήν, προκειμένου να αναδειχθεί αυτή η ικανότητά τους ανεξάρτητα από τη χρήση του συγκεκριμένου μέσου. Συγκεκριμένα, μελετάται η σχέση των εκτιμήσεων με την ηλικία, το φύλο και το μέγεθος των αριθμών.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 64 παιδιά που προέρχονταν από την Α' τάξη (N=25, μ.ο. ηλικίας: 6 χρόνια και 9 μήνες) και τη Β' τάξη (N=39, μ.ο. ηλικίας: 7 χρόνια και 9 μήνες). Τα 31 από αυτά τα παιδιά ήταν κορίτσια (10 και 21 από Α' και Β' τάξεις) και τα 33 ήταν αγόρια (15 και 18 από Α' και Β' τάξεις). Οι συμμετέχοντες φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Καρδίτσας και κάλυπταν διαφορετικά μορφωτικά και κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός-Εργαλείο μέτρησης

Για τον σκοπό της έρευνας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες τρία έργα εκτίμησης αριθμητικών ποσοτήτων, τα οποία στηρίχθηκαν και επέκτειναν τα εργαλεία των Siegler και Booth (2004), Siegler και Opfer (2003) και Luwel, Verschaffel, Onghena και De Corte (2003). Στο πρώτο έργο (**Έργο 1: Εκτίμηση θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή**), δίνονταν συγκεκριμένοι αριθμοί από το 0 έως το 100, ένας αριθμός από κάθε δεκάδα, με τυχαία σειρά και ζητήθηκε από τα παιδιά να υπολογίσουν τη θέση τους στην αριθμογραμμή, σημειώνοντας μία κάθετη γραμμή στο σημείο που θεωρούσαν κατάλληλο. Στο δεύτερο έργο (**Έργο 2: Εκτίμηση αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή**), ζητήθηκε το αντίθετο, δηλαδή δινόταν σε αριθμογραμμή μία συγκεκριμένη θέση και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να βρουν την τιμή του αριθμού αυτής της θέσης. Στο τρίτο έργο (**Έργο 3: Εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου**), οι συμμετέχοντες έβλεπαν συγκεκριμένο αριθμό κουκίδων σε τυχαία διάταξη και έπρεπε να εκτιμήσουν τον αριθμό τους. Στο συγκεκριμένο έργο, ο χρόνος ήταν άτυπα περιορισμένος έτσι ώστε να αποφευχθεί η καταμέτρηση των κουκίδων.

Σε όλα τα έργα δίνονταν οι συγκεκριμένοι αριθμοί με τυχαία σειρά, η οποία όμως ήταν ίδια για όλα τα παιδιά. Στα δύο πρώτα έργα χρησιμοποιήθηκε άδεια αριθμογραμμή μήκους 25 εκ. με άκρα το 0 (αριστερό άκρο) και το 100 (δεξιό άκρο αριθμογραμμής), ενώ στο τρίτο έργο οι κουκίδες προβάλλονταν σε οθόνη υπολογιστή.

Προκειμένου να αποφευχθούν λάθη κόπωσης από τη συμμετοχή στην έρευνα, χρησιμοποιήθηκαν δύο σειρές παρουσίασης των έργων (Σειρά Α: Έργα 1, 2 και 3 και Σειρά Β: Έργα 3, 2 και 1). Σχεδόν ισάριθμα από κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παιδιά κατανεμήθηκαν τυχαία σε μία από τις δύο σειρές παρουσίασης των έργων.

Διαδικασία

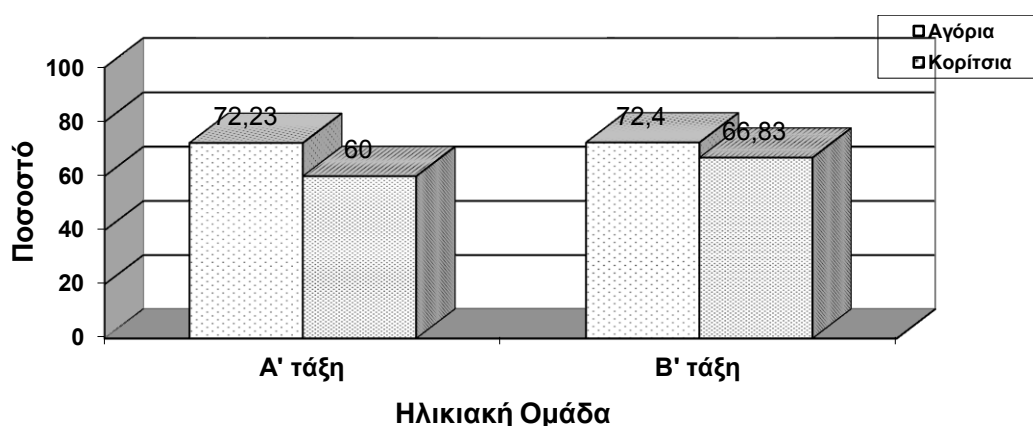
Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα τέλη του μήνα Μαρτίου της σχολικής χρονιάς 2017-18. Τα παιδιά εξετάστηκαν κατά ομάδες σε ήσυχο χώρο του σχολείου τους. Η συμμετοχή τους ήταν ανώνυμη και προαιρετική. Αφού δίνονταν αρχικά οι βασικές οδηγίες για κάθε έργο, ακολουθούσε ένα παράδειγμα και δεν δινόταν καμία ανατροφοδότηση μετά από αυτό. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 40 λεπτά για κάθε ομάδα παιδιών.

Αποτελέσματα

Για τον έλεγχο της επίδοσης των συμμετεχόντων χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν ποσοστιαία απόκλιση κατά 20% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης (π.χ., για την εκτίμηση της θέσης του 36 στην αριθμογραμμή, θεωρήθηκαν σωστές οι απαντήσεις όσων υποδείκνυαν θέσεις αριθμών από 26 έως 46).

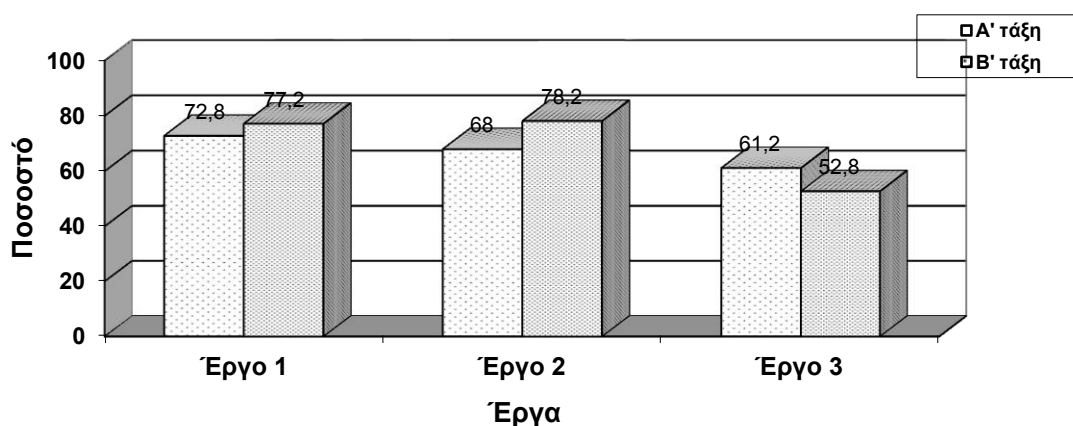
Γενική επίδοση

Οι συμμετέχοντες στο σύνολό τους παρουσίασαν αρκετά μεγάλα ποσοστά επιτυχίας (περίπου 68%) χωρίς να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την ηλικία ($t=-7,11$, $df=62$, $p=.480$). Το φύλο επηρέασε τη γενική επίδοση των παιδιών της Α' τάξης μόνο ($t=2,706$, $df=23$, $p<.05$), με τα αγόρια να εμφανίζουν στατιστικά σημαντικά περισσότερες σωστές εκτιμήσεις από τα κορίτσια στο σύνολο των έργων (βλ. Σχήμα 1). Αντίθετα, στη Β' τάξη, αγόρια και κορίτσια είχαν παρόμοιες επιδόσεις ($t=1,675$, $df=37$, $p=.102$).



Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς την τάξη και το φύλο

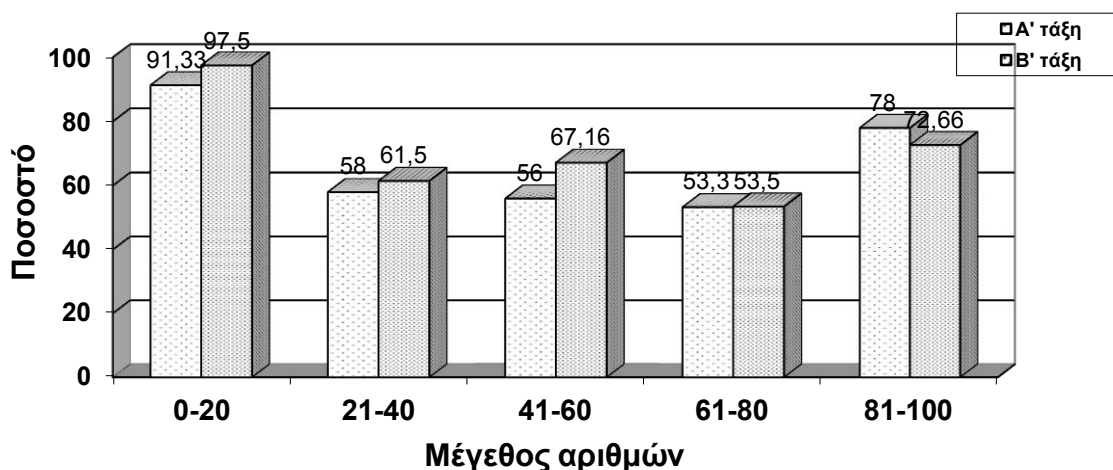
Παρόμοιες ήταν οι επιδόσεις των παιδιών στα Έργα 1 και 2 ($t=.546$, $df=63$, $p=.587$), ενώ το Έργο 3 ήταν αυτό στο οποίο είχαν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις σε σχέση με το Έργο 1 ($t=6,451$, $df=63$, $p<.001$) και το Έργο 2 ($t=7,197$, $df=63$, $p<.001$). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν. Δηλαδή, και πάλι τα παιδιά της Α' τάξης είχαν παρόμοιες επιδόσεις με τα παιδιά της Β' τάξης στα δύο πρώτα έργα που αφορούσαν την εκτίμηση με χρήση της αριθμογραμμής, στα οποία απέδωσαν καλύτερα από το τρίτο έργο (βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς το Έργο και την τάξη

Επίδοση στα Έργα και μέγεθος αριθμών

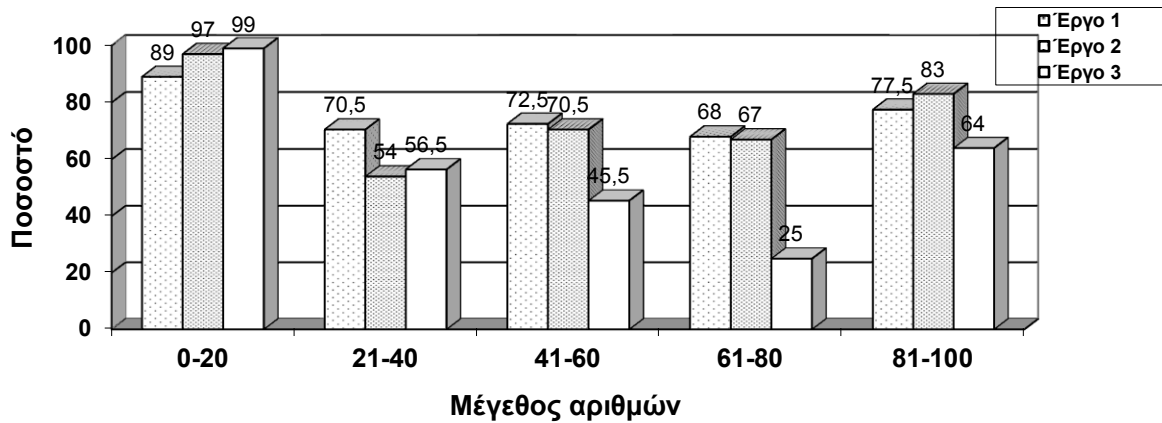
Προκειμένου να εξεταστεί αν διαφοροποιήθηκε η επίδοση των παιδιών ανάλογα με το μέγεθος των αριθμών (μικροί, μεσαίοι, μεγάλοι) πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Αρχικά, πρέπει να διευκρινιστεί πως μεγάλοι θεωρήθηκαν οι αριθμοί από 81 έως 100 και μικροί οι αριθμοί από 0 έως 20. Οι υπόλοιποι αριθμοί είναι οι μεσαίοι και οι ανάλυσή τους έγινε σε τρία μέρη: μεσαίοι των δεκάδων 21-40, μεσαίοι των δεκάδων 41-60 και μεσαίοι των δεκάδων 61-80. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση των παιδιών στους μικρούς αριθμούς ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερη από όλες τις άλλες ομάδες αριθμών. Συγκεκριμένα, η επίδοση στους μικρούς αριθμούς ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερη συγκριτικά με τους μεσαίους αριθμούς των δεκάδων 21-40 ($t=12,594$, $df=63$, $p<.001$), τους μεσαίους των δεκάδων 41-60 ($t=11,338$, $df=63$, $p<.001$), τους μεσαίους των δεκάδων 61-80 ($t=13,138$, $df=63$, $p<.001$) αλλά και τους μεγάλους αριθμούς ($t=8,115$, $df=63$, $p<.001$). Επίσης, τα παιδιά είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στους μεγάλους αριθμούς σε σχέση με τους μεσαίους αριθμούς των δεκάδων 21-40 ($t=-4,492$, $df=63$, $p<.001$), τους μεσαίους των δεκάδων 41-60 ($t=-3,142$, $df=63$, $p<.01$) και τους μεσαίους των δεκάδων 61-80 ($t=-7,165$, $df=63$, $p<.001$). Με άλλα λόγια, τα παιδιά, ανεξάρτητα από ηλικιακή ομάδα, στο σύνολο των έργων δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις δοκιμασίες με τους μεσαίους αριθμούς (21-80) (ποσοστό επιτυχίας: περίπου 60%) σε σχέση με τις δοκιμασίες που είχαν μικρούς ή μεγάλους αριθμούς (ποσοστά επιτυχίας: 95% και 75%, αντίστοιχα) (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς το μέγεθος αριθμών και την τάξη

Η ανάλυση του αριθμού των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς το μέγεθος των αριθμών ξεχωριστά για κάθε έργο, έδειξε και πάλι πως σε όλα τα έργα οι μικροί και οι μεγάλοι αριθμοί (από 0 έως 20 και από 81 έως 100, αντίστοιχα) ευνοούσαν τις σωστές εκτιμήσεις. Παράλληλα, οι εκτιμήσεις των παιδιών στις δοκιμασίες με μεσαίους αριθμούς (από 21 έως 80) κινήθηκαν σε παρόμοια επίπεδα επιτυχίας (βλ. Σχήμα 4) και ήταν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερες από αυτές των μικρών και μεσαίων αριθμών ($p<.01$).

Υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στη συνολική επίδοση των παιδιών και τις επιδόσεις για κάθε έργο ξεχωριστά (Pearson's $r=.743$, $p<.01$, Pearson's $r=.784$, $p<.01$ και Pearson's $r=.510$, $p<.01$, για τα Έργα 1, 2 και 3, αντίστοιχα). Όσοι συμμετέχοντες παρουσίαζαν πολύ καλές εκτιμήσεις στο Έργο 1 έτειναν να εμφανίζουν επιτυχείς εκτιμήσεις και στο Έργο 2 (Pearson's $r=.442$, $p<.01$). Καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην επιτυχία στο Έργο 3 και τα άλλα Έργα (βλ. Πίν. 1).



Σχήμα 4: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς το μέγεθος αριθμών και το Έργο

Πίνακας 1: Συσχετίσεις της συνολικής επίδοσης με την επίδοση στα Έργα

	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Συνολική Επίδοση	.743	.784	.510
Έργο 1		.442	-.019
Έργο 2			.161
Έργο 3			

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η ικανότητα των παιδιών Α' και Β' τάξης να πραγματοποιούν εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων. Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα, όπως προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Πρώτον, στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης το ποσοστό των επιτυχών εκτιμήσεων των συμμετεχόντων βρέθηκε αρκετά υψηλό. Με δεδομένο ότι τα παιδιά ήταν μικρής ηλικίας, το εύρημα αυτό αναδεικνύει δυνατότητες των μικρών παιδιών και ενδεχομένως προοπτικές ενίσχυσής τους. Επιπρόσθετα, τα παιδιά της Α' τάξης και τα παιδιά της Β' τάξης παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών (με ποσοστά επιτυχίας 67% και 69%, αντίστοιχα). Δηλαδή, η μικρή ηλικιακή διαφορά μεταξύ των συμμετεχόντων δεν διαφοροποίησε την επιτυχία τους στις εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων. Ενδεχομένως, δεδομένης της χρονικής περιόδου κατά την οποία υλοποιήθηκε η έρευνα, η εξοικείωση των παιδιών (ακόμη και των μικρότερων) με τους αριθμούς συνετέλεσε στη μη σημαντική διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας των δύο ομάδων. Ωστόσο, αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (Siegler & Booth, 2004; Siegler & Orfer, 2003).

Δεύτερον, εντοπίστηκαν διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών στα έργα. Συγκεκριμένα, τα παιδιά εμφάνισαν -με παρόμοια συχνότητα- περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις ποσοτήτων σε αριθμογραμμή (Έργα 1 και 2, με ποσοστά επιτυχίας περίπου 75% και 74%, αντίστοιχα) σε σχέση με εκτιμήσεις πλήθους (ποσοστό επιτυχίας περίπου 56% στο Έργο 3). Φαίνεται, λοιπόν, πως η εκτίμηση της πληθικότητας ενός συνόλου στοιχείων δυσκόλεψε τους συμμετέχοντες περισσότερο. Αυτή τους η δυσκολία ενδεχομένως οφείλεται σε παράγοντες όπως ο σχετικά περιορισμένος διαθέσιμος χρόνος για εκτίμηση, το πλήθος των στοιχείων (το πλήθος των κουκίδων έφτανε μέχρι τις 98 κουκίδες) αλλά και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάστηκαν οι κουκίδες στο Έργο 3, δηλαδή η τυχαία διάταξή τους (και όχι σε σειρές), η απόσταση μεταξύ τους και η αναλογία κενού χώρου και κουκίδων. Τη σημασία του πλαισίου ενός έργου σε δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους τόνισαν οι Luwel et al. (2003), υποστηρίζοντας πως διαφορετικά πλαίσια εμφάνισης των στοιχείων που πρόκειται

να εκτιμηθούν ως προς το πλήθος τους (π.χ., τετράγωνο ή παραλληλόγραμμο πλαίσιο) ευνοούν διαφορετικές στρατηγικές εκτίμησης πλήθους. Με άλλα λόγια, η στρατηγική που χρησιμοποιεί κάποιος για να εκτιμήσει το πλήθος ενός συνόλου διαφοροποιείται κάθε φορά από το εκάστοτε πλαίσιο και προσαρμόζεται σε αυτό.

Το γεγονός ότι η χρήση της αριθμογραμμής ευνόησε τις επιτυχείς εκτιμήσεις των παιδιών αναδεικνύει ότι ενδεχομένως ενεργοποιούνται διαφορετικές γνωστικές λειτουργίες. Το εύρημα αυτό ενισχύει τα αποτελέσματα των Barth και Paladino (2011) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι δοκιμασίες εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή μπορούν να ερμηνευθούν ως εκτιμήσεις αναλογίας, κάτι που δεν ισχύει με τις εκτιμήσεις πλήθους. Για παράδειγμα, δεν μπορεί κάποιος να εκτιμήσει τη θέση του αριθμού 30 (μέρος) δίχως να γνωρίζει ότι στα άκρα βρίσκονται οι αριθμοί 0 και 100 (όλο). Άλλες καταστάσεις εκτίμησης, όπως οι εκτιμήσεις πλήθους, δεν απαιτείται να αντιμετωπίζονται ως αναλογίες: κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι το πλήθος ενός συνόλου στοιχείων είναι 30, χωρίς απαραίτητα να κάνει κάποια σύγκριση. Ενδεχομένως, οι εκτιμήσεις στη βάση της αναλογίας, όπως είναι οι εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, ευνοούν περισσότερο την επιτυχία των παιδιών σε σχέση με τις εκτιμήσεις που δεν στηρίζονται σε αναλογία, όπως είναι οι εκτιμήσεις πλήθους. Άλλωστε, αυτό έδειξε και η συσχέτιση των απαντήσεων των παιδιών στα τρία έργα, αφού βρέθηκε πως όσα παιδιά παρουσίαζαν επιτυχείς εκτιμήσεις θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή (Έργο 1) έτειναν να εμφανίζουν, επίσης, επιτυχείς εκτιμήσεις αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή (Έργο 2). Αντίθετα, καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην επιτυχία στις εκτιμήσεις πλήθους (Έργο 3) και τις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή (Έργα 1 και 2).

Τέλος, το μέγεθος των αριθμών φαίνεται να επηρεάζει τις αριθμητικές εκτιμήσεις των παιδιών και των δύο ηλικιακών ομάδων: η επίδοση όλων των παιδιών στους μικρούς αριθμούς (0-20) ήταν πολύ καλύτερη (με ποσοστό επιτυχίας 95%) τόσο από αυτήν στους μεγάλους αριθμούς (81-100, ποσοστό επιτυχίας 75%) αλλά κυρίως από την επίδοσή τους στους μεσαίους αριθμούς (21-80), όπου τα ποσοστά επιτυχίας ήταν σημαντικά χαμηλότερα (περίπου 60%). Το συγκεκριμένο εύρημα ενισχύει ακόμη περισσότερο την άποψη των Barth και Paladino (2011) ότι οι αριθμητικές εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή αποτελούν εκτιμήσεις αριθμητικών αναλογιών, δηλαδή συγκρίσεις μέρους όλου. Έτσι, όταν ένα παιδί έχει να εκτιμήσει τη θέση ενός μικρού ή μεγάλου αριθμού σε αριθμογραμμή με συγκεκριμένη αρχή και τέλος, είναι πιθανόν να σκεφτεί ότι ο αριθμός αυτός είναι πριν ή μετά το κέντρο της αριθμογραμμής και να εκτιμήσει πόσο μακριά ή πόσο κοντά στο αντίστοιχο άκρο βρίσκεται η θέση του. Όταν όμως πρόκειται να εκτιμηθεί ένας μεσαίος αριθμός, εκτός από το να εκτιμήσει αν ο αριθμός βρίσκεται πιο κοντά στο ένα (0) ή στο άλλο άκρο (100) της αριθμογραμμής, πρέπει να εκτιμήσει και τη σχέση αυτού του αριθμού με το κέντρο της αριθμογραμμής (50) το οποίο, όταν δεν δίνεται (όπως στην παρούσα έρευνα), δεν μπορεί εύκολα να λειτουργήσει ως σημείο αναφοράς.

Ιδιαίτερα μεγάλη ήταν η άνεση των παιδιών να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις με μικρούς αριθμούς και στα τρία έργα (89%, 97% και 99%, στα Έργα 1, 2 και 3, αντίστοιχα). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι αυτό ισχύει ακόμα και στις εκτιμήσεις πλήθους. Ενδεχομένως αυτό εξηγείται από την εξοικείωση των παιδιών με τους μικρούς αριθμούς (Ebersbach et al., 2008). Είναι, επίσης, πιθανόν να θεωρούσαν πως ένα σύνολο με λίγες κουκίδες που κάλυπτε ελάχιστο χώρο στην οθόνη του υπολογιστή ήταν κοντά στο 0. Σε κάθε περίπτωση, περαιτέρω έρευνα στο πεδίο των εκτιμήσεων είναι απαραίτητη.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αφενός προβάλλουν αισιόδοξα ευρήματα για τις δυνατότητες των μικρών παιδιών στις εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων και αφετέρου αναδεικνύουν την ανάγκη περαιτέρω αναζήτησης του τρόπου με οποίο τα παιδιά πραγματοποιούν εκτιμήσεις. Με δεδομένο ότι η ικανότητα εκτίμησης συνιστά συστατικό στοιχείο της αίσθησης του αριθμού (Greeno, 1991), η ανάπτυξη της οποίας αποτελεί σημαντικό σκοπό στη διδασκαλία των Μαθηματικών, είναι πολύ σημαντικό να βρεθούν τα

σημεία που δυσκολεύουν ή διευκολύνουν τα παιδιά προκειμένου να σχεδιαστούν συστηματικές παρεμβάσεις με σκοπό την ενίσχυσή τους.

Αναφορές

Barth, H.C., & Paladino, A.M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14(1), 125-135.

Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 42(1), 189-201.

Dackermann, T., Huber, S., Bahnmüller, J., Nuerk, H.-C., & Moeller, K. (2015). An integration of competing accounts on children's number line estimation. *Frontiers in Psychology*, 6-884, 1-7.

Ebersbach, M., Luwel, K., & Verschaffel, L. (2015). The relationship between children's familiarity with numbers and their performance in bounded and unbounded number line estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17, 136-154.

Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year-old children: Evidence from a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99(1), 1-17.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218.

Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115(3), 394-406.

Hogan, T.P., & Brezinski, K.L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.

Link, T., Nuerk, H.C., & Moeller, K. (2014). On the relation between the mental number line and arithmetic competencies. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(8), 1597-1613.

Luwel, K., Verschaffel, L., Onghena P., & De Corte, E. (2003). Strategic aspects of numerosity judgement: The effect of task characteristics. *Experimental Psychology*, 50(1), 63-75.

Park, J., & Brannon, E.M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, 24(10), 2013-2019.

Sasanguie, D., van den Bussche, E. & Reynvoet, B. (2012). Predictors for mathematics achievement? Evidence from a longitudinal study. *Mind, Brain, and Education*, 6(3), 119-128.

Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444.

Siegler, R.S., & Opfer, J. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14(3), 237-243.

Schneider, M., Grabner, R.H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359-372.

Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62, 273-296.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Thompson, C.A., & Opfer, J.E. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effects of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development*, 81(6), 1768-1786.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Year 1 and Year 2 children's estimations of numerical quantities

Desli Despina

Associate professor, School of Primary Education, Aristotle University of Thessaloniki
ddesli@eled.auth.gr

Triantafyllou Eirini

Primary school teacher, School of Primary Education, Aristotle University of Thessaloniki,
Postgraduate Student in Mathematics Education
eirinitriant96@gmail.com

Abstract

The purpose of the present study is to examine the ability of young children to estimate numerical quantities. For this purpose, three tasks were designed and presented to a total of 64 students coming from Year 1 and Year 2 classes. The tasks presented to the children included: a) a number and asking them to estimate its position on a number line (Task 1), b) a position on a number line and asking them to estimate the number that corresponds to it (Task 2), c) a set of dots and asking them to estimate its numerosity (Task 3). Although the success rates of the two age groups did not differ significantly, the use of the 0-to-100 numberline facilitated their successful estimates: 75% of the children made successful estimates in Tasks 1 and 2, where the numberline was used. It seems that six- and seven-years-olds were more able to estimate numerical quantities than to estimate the numerosity of a total. Last but not least, regardless of the age group, in all tasks presented, children found it more difficult to make estimations with median numbers (from 21 to 80), rather than with small (from 1 to 20) or large numbers (from 81 to 100).

Keywords: estimations, numerical quantities, number line, numerosity