Επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου: μια συγκριτική έρευνα

Μαρκοπούλου Ελένη
Μαθηματικός (ΠΕ03), Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων
emarkopoulou@yahoo.gr

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια συγκριτική μελέτη, η οποία αναφέρεται στην αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας σε σχέση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Έρευνες έχουν δείξει ότι η ικανότητα επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετίζεται με τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος που απαιτεί το πρόβλημα και η κατανόηση αυτή βελτιώνεται με τη χρήση κατάλληλων μέσων, όπως είναι τα λογισμικά. Στην έρευνα συμμετείχαν 16 μαθητές της Α’ Λυκείου, οι οποίοι κατατάχθηκαν σε οκτώ ζευγάρια και ασχολήθηκαν με δραστηριότητες, οι οποίες περιλάμβαναν γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούσαν την κατασκευή γεωμετρικού σχήματος. Στις δραστηριότητες αυτές τα τέσσερα ζευγάρια μαθητών χρησιμοποίησαν το λογισμικό Geogebra και τα υπόλοιπα τέσσερα τα παραδοσιακά εργαλεία. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έλυσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα γεωμετρικά προβλήματα σε αντίθεση με τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα παραδοσιακά εργαλεία.

Λέξεις κλειδιά: κατασκευή σχημάτων, χρήση εργαλείων, επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της ραγδαίας ανάπτυξης της Πληροφορικής και της εισαγωγής νέων Τεχνολογιών στα σχολεία, παρατηρείται σε διεθνές επίπεδο στροφή προς τον σχεδιασμό ερευνών και χρήση εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες ενσωματώνουν τεχνολογικές εφαρμογές σε ολοένα μεγαλύτερο βαθμό. Η χρήση Η/Υ μπορεί να συμβάλλει στον πειραματισμό και στον έλεγχο εικασιών από τους μαθητές, ενώ παράλληλα παρέχει πολύτιμα εργαλεία, όπως η διερεύνηση και η οπτικοποίηση (Hanna, 2000). Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας παίζουν σημαντικό ρόλο στη στήριξη καινοτόμων μαθησιακών τροχιών, ιδιαίτερα στη Γεωμετρία.

Στην παρούσα έρευνα διαφαίνεται η σημασία και ο ρόλος της γεωμετρικής κατασκευής στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης. Σύμφωνα με τη Mariotti (2002), μια γεωμετρική κατασκευή αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγεται ένα γεωμετρικό σχέδιο. Μια γεωμετρική κατασκευή από την αρχή έως και την ολοκλήρωσή της θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί βάσει καθορισμένων κανόνων. Εντοπίζονται διαφορές στην κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων πάνω σε χαρτί από την κατασκευή σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας στον υπολογιστή. Οι Yerushalmy και Chazan (1990) υποστηρίζουν ότι ο τρόπος που βλέπουμε ένα γεωμετρικό σχήμα κατασκευασμένο με το λογισμικό αποτελεί έναν κρίσιμο γνωστικό παράγοντα για τον γεωμετρικό συλλογισμό και κατ’ επέκταση για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Σημαντικές θεωρίες που συνδέονται με τα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών αποτελούν η θεωρία των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης (Duval, 1995), καθώς και η θεωρία των vanHiele (1999).

Θεωρητικό πλαίσιο

Η γεωμετρική κατασκευή παίζει σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση και κατανόηση γεωμετρικών εννοιών. Γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων, όπως ο χάρακας, ο διαβήτης, το τρίγωνο, το μοιρογνωμόνιο, κ.ά., αλλά συχνά είναι χαράξεις που δεν αντιστοιχούν πάντα σε μια μαθηματική διαδικασία, όσο σε μια πρακτική διαδικασία χειρισμού των οργάνων (Τζεκάκη, 1991; 1992). Αντίστοιχα, μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια λογισμικών πάνω στην επιφάνεια του υπολογιστή. Σύμφωνα με τη Heid (1997), τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας ανοίγουν νέους μαθηματικούς κόσμους στα γεωμετρικά δεδομένα, παρέχοντας τρόπους δημιουργίας και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων, ενώ παράλληλα διατηρούν τα καθοριστικά χαρακτηριστικά αυτών.

Είναι προφανές ότι υπάρχει ανάγκη να προσδιοριστούν οι γνωστικές διαδικασίες και ο τύπος σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιείται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και να εξεταστεί κατά πόσο αυτή η επιλογή οδηγεί τους μαθητές στο να δουν ένα γεωμετρικό σχήμα με κατάλληλο τρόπο. Μία από τις προσεγγίσεις της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι η *θεωρία των vanHiele (*1999). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή,οι μαθητές ανάλογα με το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης τους κατατάσσονται σε πέντε διαφορετικά επίπεδα, αναδεικνύοντας διαφορετική συμπεριφορά και χαρακτηριστικά γεωμετρικής σκέψης. Έρευνες που μελέτησαν τα τέσσερα επίπεδα που συναντώνται στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης υπέδειξαν ότι, ειδικά για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να έχουν κατακτήσει το τρίτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά το οποίο διατάσσουν λογικά τις ιδιότητες των σχημάτων και καταλαβαίνουν τις μεταξύ τους αλληλεξαρτήσεις (Gawlick, 2005).

Σε μια διαφορετική προσέγγιση, ο Duval (1995) επιχείρησε μια προσπάθεια καθορισμού των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης καταγράφοντας τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης της γεωμετρικής εικόνας (Αντιληπτική, Σειριακή, Λεκτική και Λειτουργική) από τους μαθητές. Κάθε είδος κατανόησης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Η λειτουργική κατανόηση εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος, αλλά η κατάκτηση από τον μαθητή του σταδίου της λειτουργικής κατανόησης προϋποθέτει την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση (Duval, 1995).

Συμπληρωματικά στις παραπάνω θεωρητικές προσεγγίσεις, σχετικά με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι Yerushalmy και Chazan (1990) ανέδειξαν τρία εμπόδια τα οποία οι μαθητές πρέπει να ξεπεράσουν κατά την εξέταση και ερμηνεία των γεωμετρικών σχημάτων και πιο συγκεκριμένα: α) να κατανοήσουν ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει χαρακτηριστικά που είναι ατομικά και όχι αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας αυτής, β) να απομονώσουν μια περιοχή του γεωμετρικού σχήματος και γ) να δουν ένα γεωμετρικό σχήμα με διαφορετικούς τρόπους.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν εφαρμόσει λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη έχουν επισημάνει σημαντική διαφορά στη διερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές (Leung, 2011; Holzl, 1996). Σύμφωνα επίσης με τους Healy και Hoyles (2002), τα εργαλεία που παρέχονται από τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας (DGS) βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών. Σε ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο κατασκευάζεται με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, όλα τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να στραφούν και να εξεταστούν από διαφορετικές οπτικές γωνίες (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Η τεχνολογία μπορεί να ενισχύσει τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών, τη σκέψη, τη μάθηση και την επίλυση προβλημάτων (Crompton et al., 2018).

Έτσι συνολικά μπορούμε να πούμε ότι κατά την τελευταία δεκαετία, υπήρξε εστίαση στην έρευνα για τη διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας, με παράλληλη ερευνητική έμφαση στις θεωρίες που σχετίζονται με τον ρόλο των διαγραμμάτων και τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών (Sinclair et al., 2017).

Η παρούσα έρευνα έχει στόχο να μελετήσει την αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, με το λογισμικό Geogebra σε σύγκριση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου, θέτοντας το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα: κατά πόσο η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας σε σχέση με τα παραδοσιακά εργαλεία συμβάλλει στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων;

Μεθοδολογία της έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν δεκαέξι μαθητές (πέντε αγόρια και έντεκα κορίτσια) της Α΄ Λυκείου από σχολεία της πόλης της Φλώρινας και η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε αποτελεί μια συγκριτική ποιοτική μελέτη. Η ερευνητική διαδικασία πραγματοποιήθηκε από τον Ιανουάριο έως τον Μάιο του 2019 μαζί με μία πιλοτική έρευνα για τη βελτίωση του εργαλείου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες και η κάθε μια ομάδα περιλάμβανε τέσσερα ζευγάρια μαθητών. Η 1η ομάδα στην οποία συμμετείχαν τέσσερα ζευγάρια μαθητών χρησιμοποίησε το λογισμικό και η 2η ομάδα με τα υπόλοιπα τέσσερα ζευγάρια χρησιμοποίησε τα γεωμετρικά όργανα.

Προκειμένου να γίνει η κατάταξη των μαθητών σε ζευγάρια καθώς και η επιλογή των ζευγαριών μεταξύ των οποίων πραγματοποιήθηκε η σύγκριση, οι μαθητές συμπλήρωσαν ατομικά, πριν τη διεξαγωγή της έρευνας, ένα διαγνωστικό τεστ το οποίο αποτελούνταν από 4 ενότητες, με σκοπό τη διερεύνηση των γνώσεων που είχαν αναφορικά με τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων, καθώς και την ικανότητα επίλυσης γεωμετρικού προβλήματος. Η 1η ενότητα περιείχε οκτώ προτάσεις συμπλήρωσης κενών με ιδιότητες πλευρών, γωνιών και διαγώνιες ιδιότητες, των ειδών τετραπλεύρων (τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο). Η 2η ενότητα περιλάμβανε τρία ζεύγη ειδών τετραπλεύρων και καταγραφή των κοινών ιδιοτήτων που αφορούσαν πλευρές, γωνίες και διαγώνιους. Η 3η ενότητα περιλάμβανε πέντε προτάσεις, τύπου σωστού – λάθους που αναδείκνυαν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Τέλος η 4η ενότητα, αφορούσε την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος και απαιτούσε την κατασκευή σχήματος.

Στη συνέχεια κάθε ζευγάρι μαθητών δούλεψε με δραστηριότητες από ένα φύλλο εργασίας, το οποίο περιλάμβανε δύο γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούσαν και την κατασκευή του σχήματος. Τα δύο γεωμετρικά προβλήματα αφορούσαν, το 1ο στην κατασκευή ενός τυχαίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και το 2ο στην κατασκευή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Οι μαθητές έπρεπε να ορίσουν τα μέσα Ε, Ζ, Η και Θ, των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ του ΑΒΓΔ τετραπλεύρου, και να ανακαλύψουν τι σχήμα είναι το ΕΖΗΘ στο κάθε πρόβλημα και στη συνέχεια να το αποδείξουν. Τα προβλήματα αυτά σχετίζονταν με το 5ο κεφάλαιο (Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια) του σχολικού εγχειριδίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α' Λυκείου. Τα τέσσερα ζευγάρια κατασκεύασαν το σχήμα με τη βοήθεια του λογισμικού πάνω στην οθόνη του υπολογιστή, ενώ τα υπόλοιπα ζευγάρια κατασκεύασαν το σχήμα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων πάνω στο φύλλο εργασίας.

Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό καταγράφηκαν στον υπολογιστή σε μορφή βίντεο με το λογισμικό Bandicam screen recorder οι στρατηγικές που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους και συμπληρώθηκε το φύλλο εργασίας. Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα παραδοσιακά εργαλεία, έγινε καταγραφή των στρατηγικών που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους με τη χρήση κινητού και συμπληρώθηκε το φύλλο εργασίας.

Η εγκυρότητα του περιεχομένου του εργαλείου εξασφαλίστηκε με την τεκμηρίωση της έρευνας στη βάση των εννοιολογικών αποσαφηνίσεων, οι οποίες προέκυψαν από τη συστηματική βιβλιογραφική μελέτη, την αντιστοίχιση του φύλλου εργασίας στο ερευνητικό ερώτημα και τη βελτίωση σε δεύτερη φάση του ερευνητικού εργαλείου, όπως αυτό προέκυψε μετά την εφαρμογή μιας αρχικής πιλοτικής έρευνας.

Αποτελέσματα

Το διαγνωστικό τεστ βοήθησε στην κατάταξη των μαθητών σε ζευγάρια σύμφωνα με το γνωστικό και αντιληπτικό τους επίπεδο. Στη συνέχεια οι συμμετέχοντες στα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου, επέλεξαν ελεύθερα το μέσο με το οποίο θα εργαστούν, δηλαδή το λογισμικό ή τα όργανα. Στον πίνακα 1, αποτυπώνονται οι απαντήσεις ανά μαθητή στις τέσσερις ενότητες του διαγνωστικού τεστ και φαίνεται η κατάταξή τους σε οκτώ ζευγάρια.

Πίνακας 1: Απαντήσεις ανά μαθητή στις τέσσερις ενότητες του διαγνωστικού τεστ

	Λ.1		Ο.1		Λ.2		Ο.2		Λ.3		Ο.3		Λ.4		Ο.4	
	Λ.1.1	Λ.1.2	Ο.1.1	Ο.1.2	Λ.2.1	Λ.2.2	Λ.3.1	Λ.3.2	Ο.2.1	Ο.2.2	Ο.3.1	Ο.3.2	Λ.4.1	Λ.4.2	Ο.4.1	Ο.4.2
1η	7	8	7	6	7	7	5	4	6	4	6	6	5	5	4	4
2η	6	6	6	8	7	8	4	3	4	7	5	8	4	5	3	3
3η	5	5	3	4	3	3	5	4	5	4	2	2	3	3	3	2
4η	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1

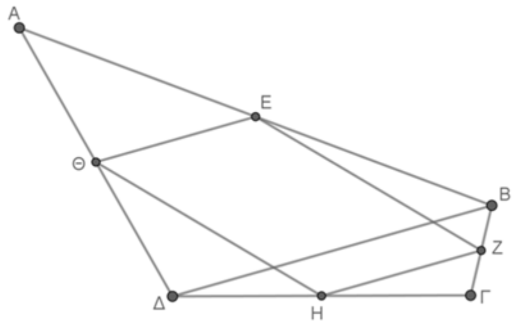
Από τους δεκαέξι μαθητές, μόνο οι τέσσερις κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν σωστά το πρόβλημα, οι οκτώ κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα, ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα. Η βαθμολόγηση σε αυτή την ενότητα, όπως φαίνεται και στον πίνακα 1, έγινε ως εξής: βαθμολογία 0, όταν δεν κατασκευάζεται το σχήμα και δεν επιλύεται το πρόβλημα, βαθμολογία 1, όταν κατασκευαστεί το σχήμα αλλά δεν επιλυθεί το πρόβλημα, βαθμολογία 2 όταν κατασκευαστεί το σχήμα και επιλυθεί μερικώς το πρόβλημα και βαθμολογία 3, όταν κατασκευαστεί το σχήμα και επιλυθεί το πρόβλημα.

Σχετικά με τις υπόλοιπες 3 ενότητες, οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις και κατατάχθηκαν σε δύο ζευγάρια: το 1ο ζευγάρι (Λ1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το 1ο ζευγάρι (Ο1) που ασχολήθηκε με τα όργανα. Επίσης, οι οκτώ μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα, ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν συγκεντρωτικά, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, κατηγοριοποιήθηκαν σε ζευγάρια και συγκρίθηκαν ανά δύο, δηλαδή το 2ο ζευγάρι (Λ2) και το 3ο ζευγάρι (Λ3) που ασχολήθηκαν με το λογισμικό με το 2ο ζευγάρι (Ο2) και το 3ο ζευγάρι (Ο3) που ασχολήθηκαν με τα όργανα αντίστοιχα. Τέλος, οι τέσσερις μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα και έδωσαν τις λιγότερες σε αριθμό συγκεντρωτικά σωστές απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε δύο ζευγάρια: το 4ο ζευγάρι (Λ4) που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το 4ο ζευγάρι (Ο4) που ασχολήθηκε με τα όργανα.

Στις δραστηριότητες του εργαλείου τα ζευγάρια κλήθηκαν να επιλύσουν δύο γεωμετρικά προβλήματα για τα οποία υπήρχε μόνο η εκφώνηση και απαιτούνταν εκτός από τη λύση και η κατασκευή του σχήματος. Τα τέσσερα ζευγάρια κατασκεύασαν τα γεωμετρικά σχήματα στον υπολογιστή χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra, ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα ζευγάρια χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά όργανα στο φύλλο εργασίας.

Το 1ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό έλυσε σωστά το 1ογεωμετρικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ έδειξε αδυναμία στην επίλυση του 2ου γεωμετρικού προβλήματος. Το 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό έλυσε σωστά και τα δύο γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αντίθετα, όλα τα υπόλοιπα ζευγάρια έδειξαν αδυναμία στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα προσπάθησαν να λύσουν τα προβλήματα, κάνοντας μετρήσεις με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και ψηλαφώντας το σχήμα και δεν προσανατολίστηκαν στο να χρησιμοποιήσουν θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας τα οποία είχαν διδαχθεί.

Πιο αναλυτικά το 1ο ζευγάρι (Λ1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό, κατασκεύασε το σχήμα που απαιτούσε το 1ο γεωμετρικό πρόβλημα στην επιφάνεια του υπολογιστή. Κατασκεύασε ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και πήρε τα μέσα Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Τα ζητούμενο ήταν να ανακαλύψει και να αποδείξει τι σχήμα είναι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ. Μετακίνησε με τη λειτουργία του συρσίματος, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έτσι ώστε να φαίνεται ένα τυχαίο τετράπλευρο και έφερε τις διαγώνιους ΔΒ και ΑΓ. Στη συνέχεια τις διέγραψε και έφερε τις διαγώνιους ΕΗ και ΘΖ του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ. Αναίρεσε και έφερε τη διαγώνιο ΔΒ όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Έτσι, κατέγραψε στο φύλλο εργασίας ότι στο τρίγωνο ΑΔΒ, τα σημεία Θ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα άρα το ΘΕ είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της ΔΒ σύμφωνα με το θεώρημα Ι της ενότητας 5.6 (εφαρμογές στα τρίγωνα) του 5ου κεφαλαίου (Παραλληλόγραμμα – τραπέζια) του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Λυκείου. Επίσης σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα τα σημεία Η και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΔΒΓ άρα το ΗΖ είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της ΔΒ. Έτσι συμπέρανε ότι το η πλευρά ΘΕ είναι ίση και παράλληλη με την πλευρά ΗΖ του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, επομένως το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

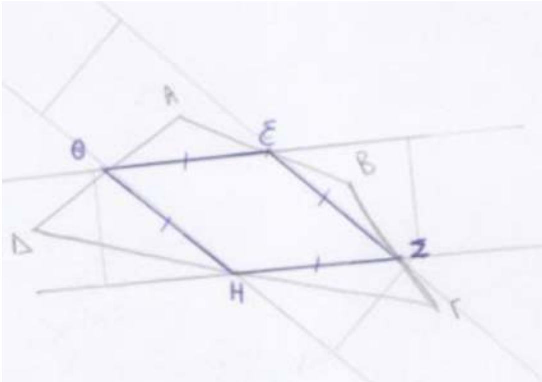


Σχήμα 1. Κατασκευή γεωμετρικού σχήματος από το 1ο ζευγάρι (Λ1) με τη χρήση λογισμικού

Απομονώνοντας τη διαγώνιο ΔΒ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, προσέγγισε καλύτερα την επίλυση του προβλήματος, διότι μπορούσε καλύτερα να αντιληφθεί το σχήμα και να χρησιμοποιήσει θεωρήματα του σχολικού εγχειριδίου. Επίσης, με τη διαδικασία του συρσίματος μπόρεσε να αντιληφθεί και οπτικά ότι το ΘΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Αντίθετα το 1ο ζευγάρι (Ο1) που ασχολήθηκε με τα όργανα κατασκεύασε το σχήμα που απαιτούσε το 1ο γεωμετρικό πρόβλημα πάνω στο φύλλο εργασίας με τη χρήση χάρακα και γνώμονα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2, μέτρησε με τον χάρακα την πλευρά ΑΒ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και βρήκε ότι είναι 3 cm, πήρε το μέσο Ε ώστε να είναι το ΑΕ ίσο με 1,5 cm. Την πλευρά ΒΓ τη μέτρησε 2,5 cm και πήρε το μέσο Ζ, έτσι ώστε ΒΖ να είναι 1,4 cm (λάθος μέτρηση). Τη ΔΓ τη μέτρησε ίση με 6,6 cm και πήρε το μέσο Η, έτσι ώστε ΔΗ να είναι 3,3 cm. Τέλος το ΔΑ το μέτρησε ίσο με 3cm και πήρε το μέσο Θ, έτσι ώστε ΔΘ=1,5cm.

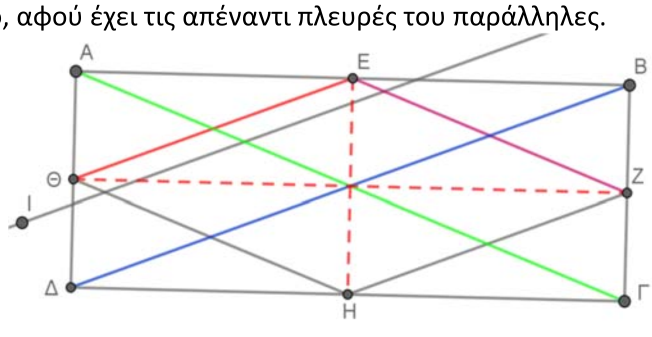
Στη συνέχεια μέτρησε όλες τις πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ και διαπίστωσε ότι είναι όλες ίσες με 2,7 cm (λάθος μέτρηση), δηλαδή όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Επίσης, μέτρησε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες $\widehat{H\Theta E}$ και $\widehat{\Theta E Z}$ και διαπίστωσε ότι είναι αντίστοιχα 45^o και 135^o. Το ίδιο έκανε και για τις γωνίες $\widehat{EZH}$ και $\widehat{ZH\Theta}$ και βρήκε ότι είναι αντίστοιχα 45^o και 135^o και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές. Χωρίς να κάνει χρήση της ιδιότητας ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, προσπάθησε να αποδείξει ότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Έτσι προέκτεινε τις ΘΕ και ΗΖ και μέτρησε τη μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στη ΘΕ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από την ΗΖ και διαπίστωσε ότι είναι ίδια. Το ίδιο επανέλαβε προεκτείνοντας τις ΕΖ και ΘΗ και μέτρησε τη μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στην ΕΖ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από τη ΘΗ και διαπίστωσε ότι είναι ίδια. Άρα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι οι πλευρές του είναι ίσες, οι πλευρές παράλληλες και οι γωνίες παραπληρωματικές και είπε, ότι αφού είναι παραλληλόγραμμο, θα είναι και ρόμβος.



Σχήμα 2. Κατασκευή γεωμετρικού σχήματος από το 1ο ζευγάρι (Ο1) με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων

Κάνοντας μετρήσεις με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων και ψηλαφώντας το σχήμα κατέληξε σε λάθος συμπεράσματα, διότι το σχήμα ήταν στατικό και δεν βοηθήθηκε ώστε να χρησιμοποιήσει θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

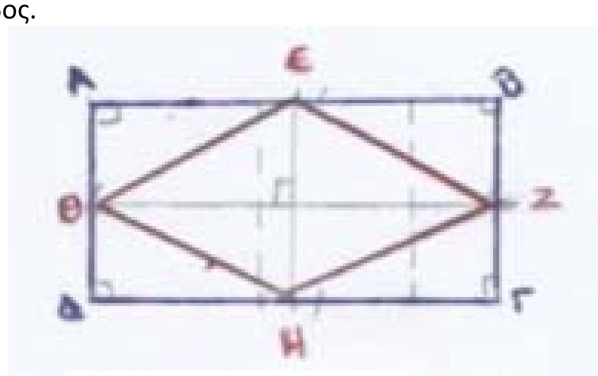
Το 2ο ζευγάρι (Λ2) που ασχολήθηκε με το λογισμικό, κατασκεύασε το σχήμα που απαιτούσε το 2ο γεωμετρικό πρόβλημα στην επιφάνεια του υπολογιστή. Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, και πήρε τα μέσα Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Τα ζητούμενο ήταν να ανακαλύψει και να αποδείξει τι σχήμα είναι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ. Έφερε τις διαγώνιους ΔΒ και ΑΓ και παράλληλη από ένα τυχαίο σημείο Ι στη ΘΕ και διαπίστωσε μετακινώντας την παράλληλη ότι η ΘΕ είναι παράλληλη με τη ΖΗ και τη ΒΔ. Χρωμάτισε την ΑΓ πράσινη και την ΕΖ ροζ. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3, χρωμάτισε τη ΒΔ γαλάζια και την ΕΘ κόκκινη. Στη συνέχεια έφερε τις διαγώνιους ΕΗ και ΘΖ και τις χρωμάτισε κόκκινες, με διακεκομμένη γραμμή. Για να αποδείξει ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, χρησιμοποίησε την απόδειξη του 1ου προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε το θεώρημα Ι της ενότητας 5.6 (εφαρμογές στα τρίγωνα) του 5ου κεφαλαίου (Παραλληλόγραμμα – τραπέζια) του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Λυκείου. Κατέγραψε ότι το ΘΕ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ του τριγώνου ΑΔΒ, επομένως η ΕΘ είναι παράλληλη με τη ΔΒ. Επίσης το ΖΗ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΔΓ του τριγώνου ΔΓΒ, επομένως η ΖΗ είναι παράλληλη με τη ΔΒ. Με γνώμονα ότι η ΕΘ είναι παράλληλη με τη ΔΒ και ΖΗ είναι παράλληλη με τη ΔΒ, η ΕΘ είναι παράλληλη με τη ΖΗ. Με τον ίδιο τρόπο απέδειξε ότι η ΘΗ είναι παράλληλη με την ΕΖ επομένως το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



Σχήμα 3. Κατασκευή γεωμετρικού σχήματος του 2ου γεωμετρικού προβλήματος από το 2ο ζευγάρι (Λ2) με τη χρήση λογισμικού

Στη συνέχεια σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΕΖΒ και χρησιμοποιώντας κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ΘΕ είναι ίση με την ΕΖ. Πιο συγκεκριμένα τα τρίγωνα είναι ορθογώνια αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, η ΑΕ είναι ίση με την ΕΒ (το Ε μέσο της ΑΒ από εκφώνηση) και η ΑΘ είναι ίση με τη ΒΖ (η ΑΔ ίση με την ΒΓ και Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα από εκφώνηση). Συμπέρανε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Αντίθετα το $2^{ο}$ ζευγάρι (Ο2) που ασχολήθηκε με τα όργανα κατασκεύασε το σχήμα που απαιτούσε το $2^{ο}$ γεωμετρικό πρόβλημα πάνω στο φύλλο εργασίας με τη χρήση χάρακα και γνώμονα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4, χρωμάτισε κόκκινες τις πλευρές του τετραπλεύρου ΘΕΖΗ. Στη συνέχεια έφερε τις διαγώνιους ΘΖ και ΕΗ και με τον γνώμονα διαπίστωσε ότι τέμνονται κάθετα. Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ και ΘΔΗ και κατέγραψε ότι είναι ίσα χωρίς να χρησιμοποιήσει κριτήρια ισότητας τριγώνων παρά μόνο οπτικά και κατέληξε ότι όλες οι πλευρές του ΘΕΖΗ είναι ίσες. Συμπέρανε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι έχει όλες τις πλευρές ίσες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα. Επίσης, ανέφερε ότι, αφού δεν έχει ορθές γωνίες, δεν είναι τετράγωνο αλλά ρόμβος.



Σχήμα 4. Κατασκευή γεωμετρικού σχήματος του $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $2^{ο}$ ζευγάρι (Ο2) με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων

Αυθαίρετα και μόνο οπτικά διαπίστωσε ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται και δεν χρησιμοποίησε για την απόδειξη, θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά βασίστηκε μόνο σε μετρήσεις και το μόνο που χρησιμοποίησε ήταν η σύγκριση τριγώνων, χωρίς όμως να γίνει αυτή με τη χρήση κριτηρίων.

Επίσης, όλα τα ζευγάρια κατασκεύασαν σωστά τα σχήματα που απαιτούσαν τα δύο γεωμετρικά προβλήματα. Στον πίνακα 2 αναφέρεται αναλυτικά η ικανότητα κατασκευής του σχήματος και επίλυσης του προβλήματος από κάθε ζευγάρι μαθητών.

Πίνακας 2: Κατασκευή σχήματος και επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων ανά ζευγάρι μαθητών

		Επίλυση $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος	Επίλυση $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος
$1^{ο}$ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
$2^{ο}$ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
$3^{ο}$ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
$4^{ο}$ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό έλυσαν πιο αποτελεσματικά τα γεωμετρικά προβλήματα του φύλλου εργασίας που τους δόθηκε σε σχέση με τα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου που ασχολήθηκαν με τα όργανα.

Συζήτηση

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας τα δύο πρώτα ζευγάρια που έλυσαν σωστά τα πρόβλημα (το $1^{ο}$ ζευγάρι έλυσε το $1^{ο}$ γεωμετρικό πρόβλημα και το $2^{ο}$ ζευγάρι έλυσε τα δύο γεωμετρικά προβλήματα)και βρήκαν τις περισσότερες ιδιότητες του διαγνωστικού τεστ, βρίσκονται στο $3^{ο}$ επίπεδο vanHiele. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν τις σχέσεις υποκατηγοριών μεταξύ διαφορετικών τύπων τετραπλεύρων και ταυτόχρονα έχουν κατακτήσει τη λειτουργική κατανόηση του Duval, η οποία εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος.

Στο ίδιο επίπεδο βρίσκονται και το $1^{ο}$ και $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα, παρά το γεγονός πως δεν μπόρεσαν να λύσουν κανένα από τα 2 γεωμετρικά προβλήματα, διότι δεν είχαν την επιπλέον βοήθεια που ήταν η χρήση του λογισμικού. Σύμφωνα με έρευνες (Christou et al., 2005), τα λογισμικά μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο, διότι οι μαθητές υποστηρίζονται στο να κατανοήσουν τα προβλήματα και να εξερευνούν τις πιθανές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα με σημαντικό εργαλείο το σύρσιμο. Ταυτόχρονα τα λογισμικά αποτελούν εργαλείο διαμεσολάβησης ενθαρρύνοντας τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων θέτοντας στη διάθεσή τους τις διαδικασίες μοντελοποίησης, υπόθεσης, πειραματισμού και γενίκευσης.

Σύμφωνα με έρευνες (Suwito et al., 2016), οι οποίες σχετίζονται με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης 3 vanHiele έχουν καλή ικανότητα να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας δεξιότητες αφαιρετικής σκέψης. Σύμφωνα με τους Yerushalmy και Chazan (1990), οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο ευέλικτοι στη χρήση διαγραμμάτων, ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια και να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, το $1^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό και έλυσε το $1^{ο}$ πρόβλημα, μπόρεσε και ξεπέρασε το $2^{ο}$εμπόδιο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να απομονώσουν μια περιοχή του διαγράμματος, διότι εξ ορισμού μία περιοχή είναι μια συλλογή σημείων και μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της επικάλυψης της σε πολλά διαγράμματα. Τέλος, ορισμένες από τις στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές του $2^{ου}$ζευγαριού που ασχολήθηκαν με το λογισμικό(όπως το να φέρει παράλληλες, να χρωματίσει ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα, να μετακινήσει το σχήμα), βοήθησαν στην κατανόηση περιοχών του σχήματος που τους δυσκόλευαν, διαδικασία η οποία είχε ως αποτέλεσμα την καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος από αυτούς.

Συμπεράσματα

Τα ευρήματα της έρευνας συνάδουν με ερευνητικές μελέτες, οι οποίες υποστηρίζουν πως η χρήση του λογισμικού ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ευέλικτη σκέψη και να επιλύσουν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα γεωμετρικά προβλήματα που τους δόθηκαν.

Η χρήση λογισμικών μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, καθώς, όπως αποκάλυψαν και τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, οι μαθητές κατανοούν καλύτερα και εξερευνούν τις πιθανές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα με σημαντικό εργαλείο το σύρσιμο. Παράλληλα τα λογισμικά μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο διαμεσολάβησης ενθαρρύνοντας τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων θέτοντας στη διάθεσή τους τις διαδικασίες μοντελοποίησης, υπόθεσης, πειραματισμού και γενίκευσης (Christou et al., 2005).

Η έρευνα υλοποιήθηκε για μικρό χρονικό διάστημα σε περιορισμένο αριθμό μαθητών και με μικρό αριθμό δραστηριοτήτων. Για τον λόγο αυτό τα συμπεράσματά της δεν είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε γενικεύσεις, είναι ωστόσο ενδεικτικά αναφορικά με τη χρήση εργαλείων στο πλαίσιο του μαθήματος της γεωμετρίας. Τα ευρήματα αυτά θα μπορούσαν επίσης να αποτελέσουν χρήσιμο εργαλείο για την πραγματοποίηση μελλοντικών ερευνών, οι οποίες θα απευθύνονταν σε μεγαλύτερο αριθμό μαθητών και θα μπορούσαν να επεκταθούν και σε άλλες ενότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Αναφορές

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3), 225-253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2005).Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, *2*(2), 125-143.

Crompton, H., Grant, M. R., & Shraim, K. Y. (2018). Technologies to enhance and extend children's understanding of geometry: A configurative thematic synthesis of the literature. Journal of Educational Technology & Society, 21(1), 59-69.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg.

Gawlick, T. (2005).Connecting arguments to actions - Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *ZDM. International Journal on Mathematics Education*, *37*(5), 361-370.

Hanna, G. (2000) Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Healy, L., & Hoyles, C. (2002) Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256.

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, *106*(1), 5-61.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169-187.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM. International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 325-336.

Mariotti, M. A. (2002).Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research. In Proceedings of the 13th international Congress on Mathematical Education (pp. 277-287). Springer, Cham.

Suwito, A., Yuwono, I., Parta, I. N., Irawati, S., & Oktavianingtyas, E. (2016). Solving Geometric Problems by Using Algebraic Representation for Junior High School Level 3 in Van Hiele at Geometric Thinking Level. *International Education Studies*, *9*(10), 27-33.

Τζεκάκη, Μ. (1991). *Γεωμετρικές δραστηριότητες στο Γυμνάσιο: τι συμβόλαιο υπογράφουμε;* Ανακοίνωση στο 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Τζεκάκη, Μ. (1992). *Αξιοποίηση του Η/Υ σε θέματα Γεωμετρίας.* Στο Μ. Μεϊμάρης & Φ, Καλαβάσης (εκδ.), Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών (σσ. 115 - 128), Αθήνα, Προτάσεις.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, *6*, 310-316

Yerushalmy, M. & Chazan D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *EducationalStudiesinMathematics*, 21(3),199–219.